

学習する概念

探究する関数：2次関数

物体の自由落下や跳ね返りなどの概念や、重力、等加速度などは2次関数のよい実例です。ここでは、バウンドするボールの高さと時間、および、跳ね返りを表す2次関数 $Y = A(X - H)^2 + K$ の係数 A について学習します。

教材

- ✓ グラフ電卓
- ✓ CBR
- ✓ 接続ケーブル
- ✓ 大きなボール (直径約20cm)
- ✓ TI ビュースクリーン (あれば)

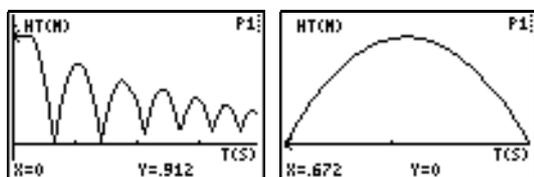
ヒント

この実験は2人でやるとうまくいきます。1人がボールを落とし、もう1人が **TRIGGER** を押すのです。

データ収集のためのヒント (6-12ページ) も参照してください。

グラフはまるで本当にボールがバウンドするような形になります。そうならないときは、CBR をボールのバウンドする方向ときっちり直角になるようにして、測定を繰り返してください。大きいボールがお勧めです。

グラフの例



探究活動

いったん手を離れたボールは、重力の影響しか受けません (空気の抵抗は無視)。したがって A の値は重力加速度 -9.8 m/s^2 (-32 ft/s^2) だけに関係します。マイナスになっているのは加速度が下向きであるからです。

A は重力加速度の約半分、 -4.9 m/s^2 (-16 ft/s^2) です。

生徒用ワークシートの解答例

1. x 軸は時間、単位は秒。 y 軸は高さ (床からの距離)、単位はメートルまたはフィート。
2. ボールを放した地点の高さ。(グラフの各頂点はバウンドの高さ。)
床は $y = 0$ で表される。

3. このプログラムで表示される時間 - 距離のグラフでは、距離はボールと CBR の距離ではない。
BALL BOUNCE プログラムは、ボールの運動をわかりやすくするために、距離のデータの上下を入れ替えている。グラフ上で $y = 0$ となっているのは、実際にはボールが CBR から最も遠くなった地点、つまりボールが床に当たったときを表している。
4. x 軸は水平距離ではなく、時間を表していることに注意。
7. $A = 1$ のとき、測定結果と逆向きで、幅の広いグラフになる。
8. $A < -1$
9. 下向きに凸。上向きに凸。直線。
12. 等しい。係数 A は、数学的には放物線の「わん曲」の程度を表す。物理的には重力加速度に関係する値で、すべてのバウンドについて共通。

発展的な課題

バウンドの最高点の高さは、およそ次のような式で表されます。

$$y = hp^x$$

ただし、

- y はバウンドする高さ
- h は最初にボールを放したときの高さ
- p はボールと床の性質によって定まる定数
- x はバウンドの回数

ボールと最初の高さが決まると、バウンドごとの最高点の高さは指数関数にしたがって減少します。 $x = 0$ のとき $y = h$ ですから、 y 切片は最初にボールを放したときの高さとなります。

熱心な生徒なら h や p の値を実験データから求めることができます。最初の高さを変えたり、ボールや床の表面を変えたりして実験してみるとよいでしょう。

ところで、1つ分のバウンドに対する2次関数を手計算で求めた後、最もフィットする関数を電卓の回帰機能を用いて求めることもできます。PLOT TOOLS メニューの SELECT DOMAIN を用いて1つのバウンドを切り取り、MAIN MENU から QUIT を選択したあと、電卓のリスト L1, L2 を用いて2次関数回帰を実行してください。

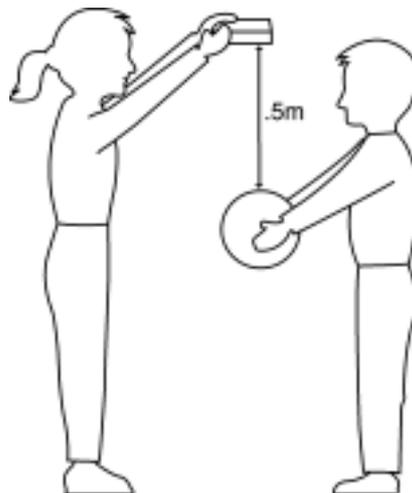
積分への発展

時間 - 速度のグラフをある時間の間隔について積分すると、その時間に移動した距離が出ます。1つ分のバウンドでは、移動距離はゼロになります (床から出発して床に戻る)。

データの収集

- ① まず練習から。ボールを落としてください (投げないように)。

Hints: ボールを落とし始める位置から少なくとも 0.5m 離して CBR を持ち、センサーが真っ直ぐボールに向くようにします。クリアゾーン (7ページ参照) には何も置かないようにしてください。



- ② RANGER プログラムを実行します (5ページに電卓ごとのキー操作を示してあります)。
 - ③ MAIN MENU から APPLICATIONS を選択し、さらに METERS または FEET を選びます。
 - ④ APPLICATIONS メニューから BALL BOUNCE を選びます。「必要なら CBR を切り離さない。CBR から 0.5m 以上離してボールを持ちなさい」という指示が出ます。種々の設定はプログラムが自動的に行います。
 - ⑤ 手を伸ばしてボールを持ちます。[ENTER] を押すと CBR の (TRIGGER) ボタンで測定を開始するモード (8ページ参照) になるので、この時点で電卓と CBR を切り離してもかまいません。
 - ⑥ (TRIGGER) を押します。緑色のランプが点滅するので、ボールを手から放し、後ろに下がってください。ボールが横にバウンドする場合には、CBR を真っ直ぐボールに向けたまま、高さを変えないように注意してボールの上を追ってください。
- CBR はクリック音を発しながら時間と距離のデータを収集し、内部で速度と加速度も計算します。CBR を切り離していた場合には、測定終了後、再び接続してください。
- ⑦ [ENTER] を押します (グラフがきれいに出ないときには、測定をやり直してください)。グラフをよく見て、ワークシートの問1, 2に答えてください。
 - ⑧ BALL BOUNCE プログラムは自動的に距離データの上下を入れ替えています。ワークシートの問3, 4に答えてください。

探究活動

バウンドするボールの時間 - 距離のグラフは、放物線の形をしています。

- ① **[ENTER]**を押して PLOT MENU を表示し、PLOT TOOLS を選択し、さらに SELECT DOMAIN を選んでください。最初のちょうど1回分のバウンドを切り取ることにします。カーソルをバウンドの開始地点に移動し、**[ENTER]**を押します。さらにバウンドの終了地点にカーソルを動かして **[ENTER]**を押すと、1回分のバウンドの様子が表示されます。
- ② グラフは自動的に TRACE モードになっているので、頂点の座標を調べ、ワークシートの間5に答えてください。
- ③ **[ENTER]**を押して PLOT MENU に戻り、MAIN MENU を選択し、さらに QUIT を選びます。
- ④ グラフの分析には、2次関数の標準形 $Y = A(X - H)^2 + K$ が適しています。**[Y=]**を押し、Y= エディタにある他の関数の表示を止めて、 $Yn=A*(X-H)^2+K$ と入力してください。
- ⑤ 基本画面に戻り、問5で記した高さを K に、そのときの時間を H に代入します。 A は 1 にしておいてください。
- ⑥ **[GRAPH]**を押してグラフを表示し、ワークシートの間6, 7に答えてください。
- ⑦ $A = 2, 0, -1$ の場合も試し、ワークシート問8の表の前半を完成し、問9に答えてください。
- ⑧ 測定結果にぴったり一致するまでいろいろな A の値を調べ、その結果をワークシート問8の表の後半に記してください。
- ⑨ 測定を繰り返し、今度は最後のバウンドの1回分を切り取って調べ、ワークシートの間10, 11, 12に答えてください。

発展的な課題

- ① 測定を繰り返します。今回は特定のバウンドを取り出しません。
- ② 各バウンドの最高点の高さと、そのときの時間を調べます。
- ③ 隣り合う、最高点と最高点の高さの比を求めます。
- ④ この比に特徴があれば、説明してください。

学習活動 4 - バウンドするボール 氏名 _____

データの収集

1. x 軸はどのような物理量を表すか。 _____
その単位は? _____
y 軸はどのような物理量を表すか。 _____
その単位は? _____
2. グラフの最大値の点は何を表すか。 _____
最小値の点は何を表すか? _____
3. BALL BOUNCE プログラムはなぜグラフの上下を入れ替えるのか。 _____
4. ボールが床を横切って跳ね返っているように見えるのはなぜか。 _____

探究活動

5. 最初のバウンドについて、最高の高さとそのときの時間を記しなさい。 _____
6. $A = 1$ のときのグラフは測定結果に一致するか。 _____
7. その理由は? _____
8. 表を完成しなさい。

A	測定結果と Y_n のグラフの比較
1	
2	
0	
-1	

9. A が正のとき、グラフの形は? _____
 A が負のとき、グラフの形は? _____
 A が 0 のとき、グラフの形は? _____
10. 最後のバウンドについて、最高の高さとそのときの時間を記しなさい。 _____
11. A の値は、最初と最後のバウンドでは異なると思うか。 _____
12. 2つの A の値の比較結果はどうか。 _____
 A は何を表していると思うか。 _____