実験 M5　残したコーヒー

この実験では，漸近線，指数関数，自然対数などの議論を通して，ニュートンの冷却法則を学習します。

イントロダクション

この実験では冷却曲線を学習します。冷却曲線は，次の2種類のモデルで表現できます。

モデル 1 :

$T = Ae^{Bt} + C$

ここで,

- T = **冷却される物質の温度**
- t = **測定を開始してからの時間の経過(単位：秒)**
- A = **冷却される物質の初期温度と室温との差**
- B = **冷却される物質とそれが入っている容器の材質によって決まる定数**
- C = **室温(単位：°C)**

この方程式を，定数の説明と一緒に，生徒達に教えておくこともできます。または，クラスによっては，データ分析を行ってこの方程式を導き出して，様々な例で実験し，定数の使われ方を調べることもできます。

モデル 2 :

$T = A*B^t + C$

方程式 $T = A*B^t$ は電卓の STAT CALC **機能を利用して求められるので，このモデルの方が好きな生徒もいるかもしれません。**

どちらのモデルを使う場合にも，一連の実験を行ってから，温度と時間の関係をよく表しているモデルを1つ選んで，冷却現象について学習します。そのモデルを使って，物質の熱が冷めにくいのはどのタイプの容器かを調べます。

必要な装置

CBL

接続ケーブルのついた電卓

TI **温度センサー**

ヘアドライヤー

アルミホイル
(6インチ　10インチ＝15cm　25cm)

様々な材質のカップ

熱湯

COPYING PERMITTED PROVIDED TI COPYRIGHT NOTICE IS INCLUDED
© 1997 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

プログラム

プログラム HEAT を電卓にダウンロードして使用します。

Note : このプログラムは，36個のデータを集め，リアルタイムでプロットします。時間データは L_3 に記録され，温度データは L_4 に記録されます。測定間隔は選択することができます。2点間の時間を入力するように指示が出たときに，1を入れるとデータは1秒おきに36秒間収集されます。2点間の時間として，60を入れるとデータは1分おきに36分間収集されます。

装置の設定手順

図1にしたがって，次の手順で装置を接続します。

❶ CBL と電卓それぞれの底部にある入出力口を接続ケーブルでつなぎます。ケーブルの端はきっちり押し込んでください。

❷ 温度センサーを CBL の上側にあるチャネル1 (CH1)に接続します。

❸ 冷却する物体または液体を用意します。

❹ CBL と電卓の電源を入れます。

これで，CBL が電卓からの命令を受け取ることができます。

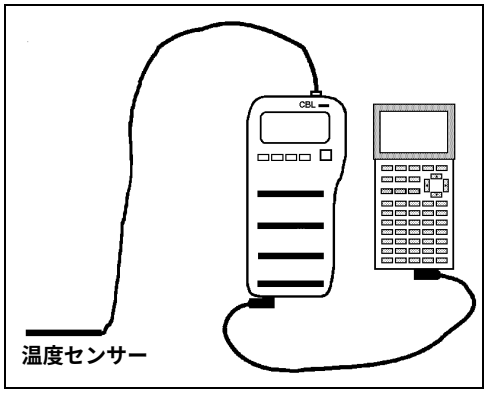


図 1 : 装置の設定

実験手順 No. 1

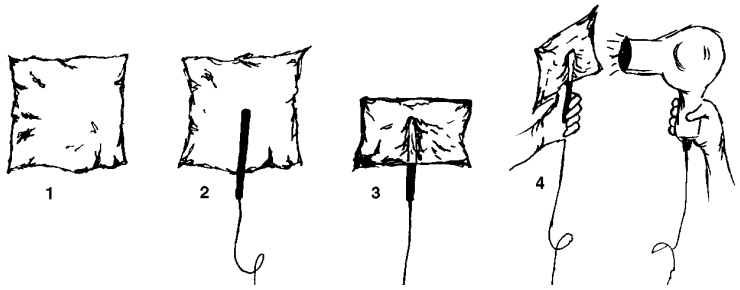
ヘアドライヤーの実験

❶ CBL の電源が入っていることを確認します。電卓でプログラム HEAT をスタートします。「HOW MUCH TIME...」と表示されたら，5を入力します。その後，[ENTER]を押すように指示が表示されるまで待って，[ENTER]を押します。このプログラムは，5秒おきに1点ずつ，3分間に36点のデータを記録します。

❷ 下の図のように，アルミホイルの長いほうの辺を半分に折り，温度センサーをアルミホイルの間にはさみ込みます。アルミホイルが密着するように，センサーの周辺はしっかり押しつけます。

COPYING PERMITTED PROVIDED TI COPYRIGHT NOTICE IS INCLUDED
© 1997 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

❸ ヘアドライヤーのスイッチを高温に入れて，ホイルの中央を暖めます。ホイルが回転してしまう場合には，ドライヤーの先をホイルに近づけます。センサーを支えている手に熱風が当たらないように気をつけます。



❹ ホイルが熱く(約70°C)なったら，電卓の ENTER を押して，データの収集を開始します。ヘアドライヤーのスイッチを切って，ホイルを冷やします。収集したデータは5秒おきに3分間，リアルタイムで表示されます。

❺ データを分析します。

アルミホイルは約3分間でほとんど完全に冷えます。したがって，冷却のデータを収集するには，適した材質です。

実験手順 No. 2

お湯の冷却実験

❶ CBL の電源が入っていることを確認します。電卓でプログラム HEAT をスタートします。「HOW MUCH TIME... 」と表示されたら，60を入力します。そのあと，ENTER を押すように指示が表示されるまで待って，ENTER を押します。

❷ コーヒーカップの1つに水を入れ，加熱します。沸騰したら，加熱を止めます。

❸ 熱湯の中に温度センサーを入れて，電卓の ENTER を押して，データを集めます。プログラムは36分間稼動します。

❹ データを分析します。

❺ ❶〜❹を繰り返します。加熱を止めるときの水温は，1回目の実験のときより低くします。

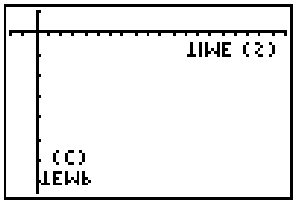
熱湯を使ってきれいな曲線を得るには，測定間隔を長めに設定します。曲線の型が決まったら，そのデータの一部を使って方程式を導き出します。

Note : センサーを(ほとんど沸騰している)熱湯に入れ，それからすばやく氷水に入れると短時間で冷却曲線が得られます。この方法だと速く結果が求められますが，センサー自体が水に熱を与えるために，センサーの周辺に起こる温度変化が問題となります。冷却の場合は，センサーの温度はその周辺の温度に次第に近づいていきます。きれいな冷却曲線を得るためには，周辺の温度は一定でなければなりません。

COPYING PERMITTED PROVIDED TI COPYRIGHT NOTICE IS INCLUDED
© 1997 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

分析と結論

Note : 電卓の統計機能の利用方法については，ガイドブック「*CBL System Compatible Calculators*」の“Performing Data Analysis (データ分析)”を参照してください。



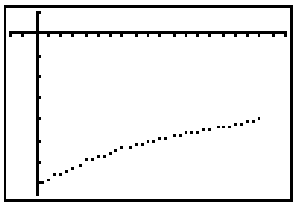
実験を行う前に，座標系を確認します。温度の単位は摂氏 (y 軸) で，時間の単位は秒 (x 軸)です。

ヘアドライヤーを使った実験では，変数は次の範囲に入ります。

$10 \le y \le 90$ (°C)，　$10 \le x \le 180$ (秒)

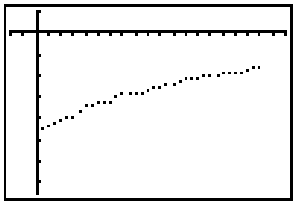
お湯の冷却実験では，変数は次の範囲に入ります。

$10 \le y \le 90$ (°C)，　$120 \le x \le 2160$ (秒)



1. **分析を始める前に，曲線の形がどうなるかを話し合います。データの点は y=0 となるのでしょうか。測定値の中での最低温度は何度になるのでしょうか。**

   曲線は次第に室温に近づきます。分析の始めに記録した温度から，教室の温度計で計った室温を引いてください。この例では，室温を24ºC とします。

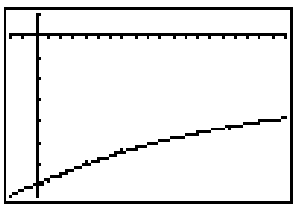


   アルミホイルの実験とお湯の冷却実験の両方において，プログラムは温度を L4 に記録し，時間データを L3 に記録します。記録した温度から室温を引くには，STAT EDIT に移って，カーソルを L5 に置きます。CLEAR ENTER と押して，既存のデータをすべて消去します。カーソルを L5 に戻して，「 L4　24 」を入力します。これによって，L4 の値のすべてから 24を引いた値が，L5 に入ります。L3 と L5 で散布図を作成して，グラフを描き直します。

2. **次の a)と b)で，(L3，L5)のモデルの求め方を2通り説明します。**

   a) **STAT CALC の ExpReg 機能(指数回帰)を利用して，**「ExpReg L3，L5」**と入力します。アルミホイルの場合の結果は，次のようになります。**

   $y = 45.28 * 0.994257^{x}$



   温度から24°C 引いてあるので，原データのモデルは次のようになります。

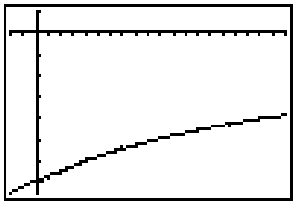
   $T = 45.28 * 0.994257^{t} + 24$

   STAT PLOT とモデルの式のグラフとを一緒に見るには，L3 と L5 の STAT PLOT の指数をオフにして，原データの L3 と L4 でプロットし直します。それから *T* の式を「Y=」**の画面に入力し，STAT PLOT の上にグラフ表示します。**

   次の図では，十分一致しています。

COPYING PERMITTED PROVIDED TI COPYRIGHT NOTICE IS INCLUDED
© 1997 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

b) 自然対数を理解していれば，(L3，L5)のデータを使って冷却についての異なったモデルを作ることができます。ヘアドライヤーの実験では，結果は次のようになります。



$T = 44.996e^{0.0057073t} + 24$

この方程式を「Y=」画面に入力し，L3 と L4 の STAT PLOT の上にグラフ表示します。

この場合でも，グラフは十分一致しています。

3. 実験 No.1 (アルミホイル)でモデルを求めたあとで，次の質問に答えてください。

a) アルミホイルが室温に達するまでに，どのくらい時間がかかるでしょうか。このモデルでは，温度は室温に限りなく近づきますが，室温に達することはありません。数学的モデルは完璧ではありません。なぜ，このモデルではアルミホイルが室温に達することがないのかを説明してください。質問を換えましょう。アルミホイルが室温より 1°C 高い温度に達するまでに，どれほどかかるでしょうか。

モデル 1 :

次の計算でわかるように，測定開始後，約662秒 (約11分) かかります。

$$\begin{aligned} T &= 45.28 * 0.994257^t + 24 \\ 25 &= 45.28 * 0.994257^t + 24 \\ 1 &= 45.28 * 0.994257^t \\ 0.022084 &= 0.994257^t \\ 662 &= t \text{ (秒)} \end{aligned}$$

モデル 2 :

このモデルでは，もう少し長くかかりますが，やはり11分程度です。

$$\begin{aligned} T &= 44.996e^{0.0057073t} + 24 \\ 25 &= 44.996e^{0.0057073t} + 24 \\ 1 &= 44.996e^{0.0057073t} \\ 0.0222242 &= e^{0.0057073t} \\ 667 &= t \text{ (秒)} \end{aligned}$$

b) ホイルが40°C に達するのは，いつでしょう。

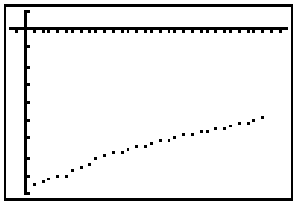
c) ホイルが失った熱の割率 (°C/秒)を求めてください。最初のモデルではホイルは毎秒熱の 0.5743%を失います(したがって，毎秒熱の 99.4257%を保持します)。

COPYING PERMITTED PROVIDED TI COPYRIGHT NOTICE IS INCLUDED
© 1997 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

4. 実験No.2では，水を2回暖めて，冷やしました。その2回とも，同じ容器を使用しました。唯一の違いは，冷却を始めたときの水の温度でした。1回目の測定では水を87°C まで熱し，それからカップを 20°C の部屋に置きました。2回目の測定では水を41°C まで熱し，それからカップを同じ部屋に置きました。

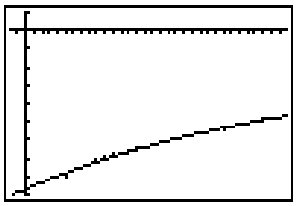
   a) 1回目の冷却モデルは，次のようになります。

   $$T = 66.8e^{0.0277923t} + 20$$



   b) 2回目の冷却モデルは，次のようになります。

   $$T = 20.377e^{0.0277923t} + 20$$



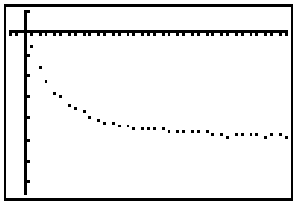
   この2つのモデルでは，定数は A 以外はすべて同じです。2回の測定で異なっているのは，冷却を始めたときの水の温度 (87°C と41°C)だけでした。定数 A はその温度に関係しているはずです。実際に，A は熱した物体が冷却を始めるときの温度と室温の差に関係します。モデルの (4aと4b)の定数 20が室温を表し，定数 0.027793 が水とカップの材質に関連することがわかります。

選択課題

1. 時間に余裕があれば，異なった材質のカップを使って，新しいモデルを作ってください。ガラス，陶磁器，プラスチックなどのうち，どの材質が最も効率よく熱を保持するでしょうか。冷却実験を行って調べます。同じ温度の水を同量入れた場合に，陶磁器のスープ皿と陶磁器の水差しのどちらが熱を保持できるでしょうか。繰り返しますが，簡単な冷却実験でこれらの質問の答えを得ることができます。

2. 熱する場合の曲線はどうなるのでしょう。氷水の入ったカップの中にセンサーを2分間入れます。センサーを水から取り出して，プログラム HEAT でデータ収集を始めます。そのデータのモデルを求めてください。モデルは測定データのグラフと一致しますか。

   右の図は，センサーを氷水の中に5分間入れてその後，熱湯の中に入れて収集しました。毎秒1回の測定を36秒間実施しました。変数の範囲は，次のようになります。



   $10 \le y \le 75$ (°C)， $2 \le x \le 36$ (秒)

COPYING PERMITTED PROVIDED TI COPYRIGHT NOTICE IS INCLUDED
© 1997 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED