# 実験 M3　振動する物体のモデル

**この実験では，振動する物体の数学的モデルを，無理関数や減衰する正弦曲線を使って生徒達に理解させます。**

## イントロダクション

ばねに様々なおもりをつけて振動させるこの実験では，いくつかの異なった数学的モデルを作ることができます。

原データは減衰する正弦曲線を描くので，周期性，振幅，減衰定数を学ぶことができます。質の良いデータを使えば，おもりの振動の頂点の高さの変化のモデルとして $a_n = k*a_{n-1}$ ( $k$：減衰定数)の形の数列を求めることができます。

三角関数では，$f(t) = a(t)\sin(bt+c)+d$ が振動するおもりの単位時間あたりの位置の変化のモデルになります。

生徒が発見できる関係として，振動の周期とおもりの質量の関係があります。その関係式は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$T$ = 周期，$M$ = 質量，$k$ = ばね定数 と表すことができます。

この関係は無理関数の良い例となっています。また，この関係を利用すれば，実験によって物体の質量を求めることができます。

## 必要な装置

CBL (できれば，電源アダプターを使用します。)

接続ケーブルのついた電卓

TI CBR　(Calculator-Based Ranger　) または Vernier CBL 距離センサー (MD-CBL)

大きなクランプ

様々なおもり

1mの棒，または硬くて重い木の棒

5インチ　5インチ (12.7cm　12.7cm)の厚紙

おもりを支えるフック
(おもりにフックがついていない場合)

粘着テープ

ばね

## プログラム

プログラム HOOK を電卓にダウンロードして使用します。

## 装置の設定手順

図1にしたがって，次の手順で装置を接続します。

❶ 棒の端にばねを取りつけます。

❷ 棒を机の上にクランプでしっかり固定します。ばねが机にぶつからないよう配慮しながら，ばねと机の距離をできるだけ短くして，棒のゆがみが実験結果に影響しないようにします。

❸ CBL と電卓それぞれの下部にある入出力口を接続ケーブルでつなぎます。ケーブルの端をきっちり押し込んでください。

❹ 距離センサーを CBL の左側にある SONIC チャネルに接続します。

❺ センサーをばねの真下に，上向きにして床の上に置きます。ばねにおもりを取りつけた場合に，おもりは距離センサーの検出範囲(0.5m以上離して)に入っていなければなりません。おもりが距離センサーに近づき過ぎる場合は，高い机を使うなどして，棒の位置を上げます。

❻ CBL と電卓の電源を入れます。

これで，CBL が電卓からの命令を受け取ることができます。

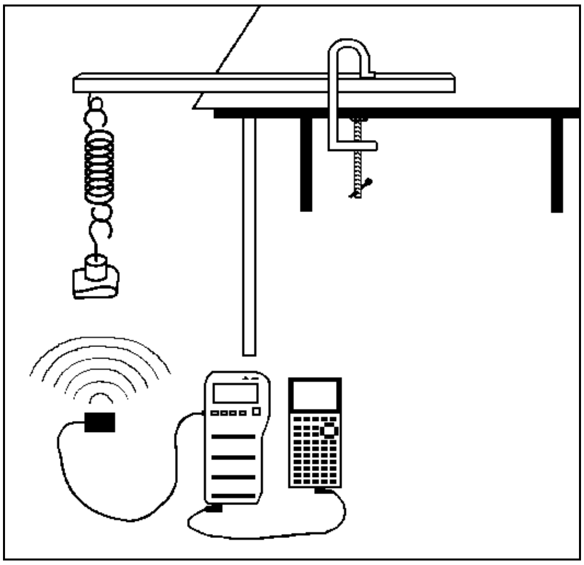


**図 1** : 装置の設定

**Note** : 棒のかわりに，スタンドを使うこともできます。その場合にも，おもりが距離センサーの検出範囲に入るように注意します。

## 実験手順

❶ CBL の電源が入っていることを確認します。電卓でプログラム HOOK をスタートします。このプログラムによって，CBL はデータを収集し，内部に記憶します。CBL の [TRIGGER]を押すと，データ収集が開始されます。データ収集が終了すると，プログラムの指示によって，CBL が接続されている電卓にデータを送ります。電卓では，データをグラフ上に点で表示します。高さ(単位：フィート)は $L_2$，時間 (単位：秒) は $L_1$ に記録されます。指示が出るまでは，[TRIGGER]を押さないでください。

❷ おもりをばねの端に取りつけます。おもりにフックがついていない場合には，支えるためのフックをつけます。厚紙をおもりの底またはフックの下にテープで貼ります。厚紙は距離センサーの標的になります。

❸ おもりの質量を記録用紙に記入します。フックの質量(もしもわかれば，厚紙の質量)も加えます。

❹ 注意しながら，おもりを下向きに垂直に引っ張って，手を離して振動させます。動きが垂直方向だけに(横の動きなしに)なったら，CBLの [TRIGGER]を押します。

❺ グラフが表示されたら，電卓の [TRACE]を押して，振動の周期を求めます(「分析と結論」の1.を参照してください)。

❻ 記録用紙に周期を独立変数，質量を従属変数として記入します。

❼ 1つのおもりを残して，様々なおもりで ❶～ ❻を繰り返します。

❽ ここまでで収集したデータを利用して，このばねの質量と周期との間の関係を決定します(「分析と結論」の2.を参照してください)。

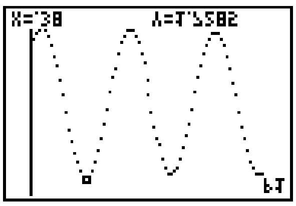
❾ 最後の(質量がわかっていない)おもりを使い，❶～ ❻を繰り返します(「分析と結論」の3.を参照してください)。周期を求めます。この周期から，おもりの質量の近似値を求めます。

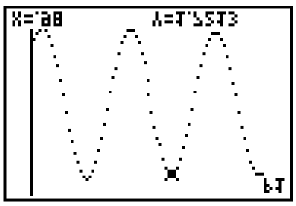
## 分析と結論

**Note** : 電卓の統計機能の利用方法については，ガイドブック「*CBL System Compatible Calculators*」の“Performing Data Analysis (データ分析)”を参照してください。

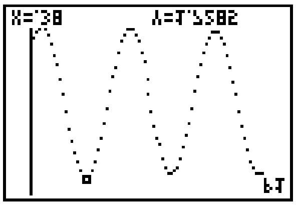
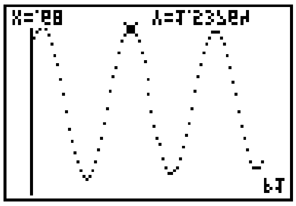
1. 振動の周期は，次の3つの方法のどれを使っても求めることができます。実際にどの方法をとるかは，収集されたデータによって決まります。

   a) 電卓の [TRACE]を使って，2個の隣り合う最大値について，対応する x 座標の値の差を計算します。この例では，0.98 − 0.38 = 0.6となります。

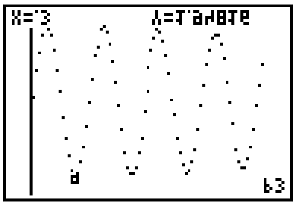
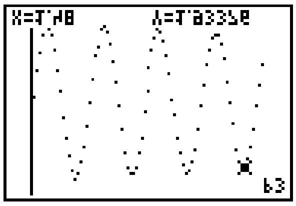




b) $\boxed{\text{TRACE}}$を使って，最大値と連続する次の最小値について，対応する x 座標の値の差を計算して，さらに2倍してください。この例では
2(0.68 − 0.38) = 2(0.3) = 0.6となります。

c) $\boxed{\text{TRACE}}$を使って，最初と最後の最大値について，対応する x 座標の値の差を計算して，その2点の間の周期の数で割ります。

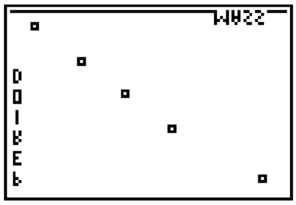
a)と b)の例とは異なり，c)の例では，全体で3周期表示されています。最初と最後の最大値の x 座標の値は x=0.3と x=1.48です。振動の周期は (1.48 − 0.3)  3 = (1.18)  3 = 0.393 になります。

2. ばねについているおもりの質量と，振動の周期の間の関係を決定します。その関係はばねによって異なるでしょうが，形式はつねに同じはずです。その関係はイントロダクションで紹介した，次の式で表されます。

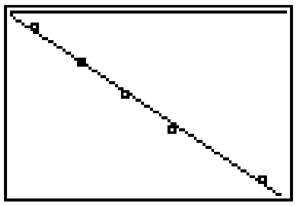
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

a) 5個のおもりのデータ(ばねは同じ)を右の表とグラフに示します。

| 質量<br>(単位：g ) | 周期<br>(単位：秒) |
|---|---|
| 1015 | 0.60 |
| 815 | 0.54 |
| 715 | 0.50 |
| 615 | 0.46 |
| 515 | 0.42 |

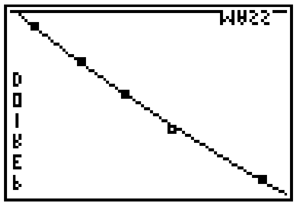


b) 質量と周期をそれぞれ $L_3$ と $L_4$ に代入し，このデータの統計プロット( STAT PLOT )を作ります。それから，このデータに最も合う関係を探して，「Y=」に入力します。



サンプルが少ないので，データが直線上にあるように見えます。サンプルを増やしても，生徒の多くは直線で近似できると考えるかもしれません。可能ならば，最低5個のデータは収集するべきです。時間が許すかぎり，多くのデータを収集したほうがよいでしょう。

c) 実際のモデルは，無理関数です。したがって，べき乗関数の方がきれいに合致します。電卓の STAT CALC PwrReg 機能を使うか，または，両座標の値を対数に変換することにより，このデータに最も合う，べき乗関数の曲線を求めることができます。



このデータに対するべき乗関数は，次のようになります。

$$f(m) = 0.015171m^{.532}$$

3. この関係式を使って，質量が不明なおもりの質量を求めます。

実験手順の ❾で，質量が不明なおもりの周期を記録しました。その値を方程式 $f(m) = 0.015171m^{.532}$ に代入して，質量 $m$ について解きます。

ととえば，周期が 0.7秒だと仮定してみましょう。

$$T = 0.015171M^{.532}$$

$$0.7 = 0.015171M^{.532}$$

$$\frac{0.7}{0.015171} = M^{.532}$$

$$46.14066 = M^{.532}$$

$$1343 = M$$

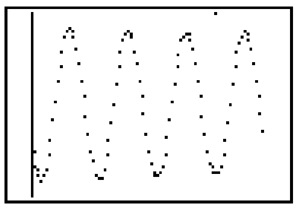
4. 三角関数の授業では，もしもきれいなデータが得られていれば，物体の位置の時間変化のモデルを作ることができます。モデルは，次の形で得られます。

$f(t)=a(t)\sin(bt+c)+d$ または $f(t)=a(t)\cos(bt+c)+d$

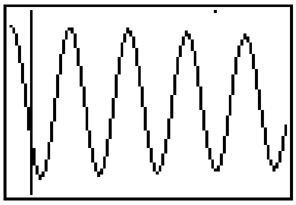
このモデルで最も難しいところは，減衰率 $a(t)$ の決定です。最初は $a(t)$ を一定と見なして，それから減衰効果を調べます。

a) 550gのおもりを使った収集データ(ばねは異なる)の，最大値の座標を右の表に示します。測定データのグラフは，その右に示します。

| 時間 | 高さ |
|---|---|
| 0.08 | 2.04179 |
| 0.58 | 2.03819 |
| 1.08 | 2.03459 |
| 1.58 | 2.03099 |



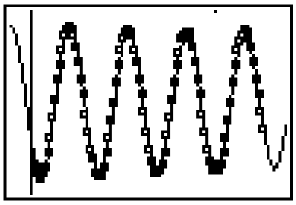
b) 次の関数は上のグラフに表示されている測定データのモデルです。



$$f(t) = 0.11163 \times .967^{\frac{t-.08}{.5}} \cos(12.566637t - 1.00531) + 1.93016$$

この関数のグラフを示します。

c) 測定されたデータと関数のグラフを同じ座標軸で描くには，上記の 4. b)で求めた関数を「Y=」に入力して，( $L_1$と $L_2$ に記録されている)収集したデータの STAT PLOT と一緒にグラフに表示します。



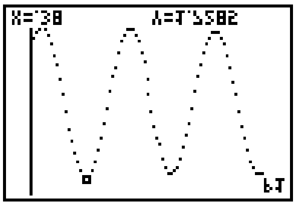
測定されたデータと関数のグラフを同じ座標軸で描くと，かなり良く合っていることがわかります。

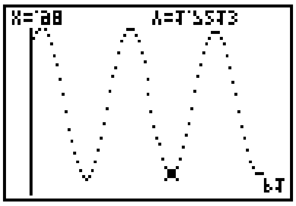
5. きれいなデータを使って，振動が減衰する割合を求めます。1015gのおもりのグラフから頂点の y 座標が，$y = 1.7285$，$y = 1.7213$，$y = 1.7141$であることがわかります。物体の高さは，毎回1.7141  1.7213 = 0.9958だけ減少します。

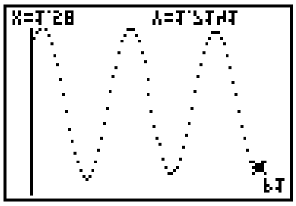
ある1つの山の頂点の y 座標を表す数列は，$a_n = 0.9958a_{n-1}$です。

ある1つの山の高さを表す指数関数は，$h = 1.7285 \quad 0.9958^n$です。

どちらの関数でも，$n$=0 が，記録された最初の山の頂点に対応します。



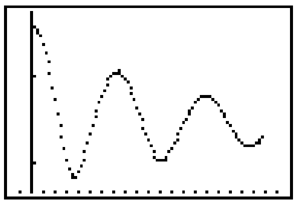




## 選択課題

授業でこのワークブックの数学の実験をすべて終了したら，バンジージャンプのグラフを予想してみてください。

右の図のデータは，重いゴムバンドにつけた丸いプラスチックの物体のバンジージャンプの測定結果です。



このデータはまず自由落下から始まり，それから減衰する調和振動の部分に移ります。他の実験で使用した手法を使って，この運動のモデルになる方程式を求めてください。その方程式は，どの部分のデータを使ったかによって異なるかもしれません。