

この実験では、落下運動を表す式として2次関数扱います。

イントロダクション

数学の授業では、2次関数が落下運動を表す式として用いられることを、生徒達は当然知っているものと見なされがちです。が、必ずしもそうとは限りません。2次関数を学ぶ前に、落下するボールの高さの時間変化のグラフを描くように言うと、ほとんどの生徒は負の傾きの直線を描きます。

この実験では、物体を落下させたり、放り上げたりして、その物体の高さの時間変化をプロットし、2次関数の一般式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が落下運動を表す式になることを示します。

この実験では、落下運動の次の2つの特別な場合について、データを収集し、グラフを描き、分析します。

1. 距離センサーの真上からの物体の落下
2. 距離センサーの真上での物体のトスと落下

両者はともに、測定結果をグラフにすると2次関数になります。

必要な装置

- ✓ CBL(できれば、電源アダプターを使用します。)
- ✓ 接続ケーブルのついた電卓
- ✓ TI CBR™ (Calculator-Based Ranger™) または Vernier CBL距離センサー (MD-CBL)
- ✓ ある程度の重さの本、ゴムボール、重い帽子など、落下させる物体

プログラム

プログラム BALLDROP と SELECT を電卓にダウンロードして使用します。

装置の設定手順

図1にしたがって、次の手順で装置を接続します。

- ① CBL と電卓それぞれの底部にある入出力口を接続ケーブルでつなぎます。ケーブルの端をきっちり押し込んでください。
- ② 距離センサーを CBL の左側にある SONIC チャンネルに接続します。
- ③ 教室の広いスペースの床の上に、センサーを上向きに置きます。

- ④ 実験を行う生徒を3人選び、「キャッチャー」、「落とす係」、「操作係」と呼ぶことにします。

キャッチャー：距離センサーの横に座って、落下する物体がセンサーにぶつかる前に受け取ります。

落とす係：物体を持って、落とす係です。

操作係：CBL を操作する係です。

Note：距離センサーのまわりを板で囲ってもかまいません。

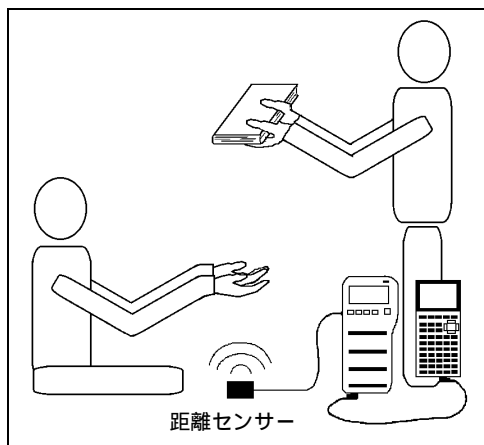


図 1：装置の設定

- ⑤ 落とす物体を選びます(距離センサーが検出しやすいように、十分大きい物体を選びます)。

- ⑥ CBL と電卓の電源を入れます。

これで、CBL が電卓からの命令を受け取ることができます。

実験手順 No. 1

落下する物体

- ① CBL の電源が入っているかを確認してから、電卓でプログラム BALLDROP をスタートします。距離センサーのジィジィという音が始まります。このプログラムによって、CBL はデータを収集し、内部に記憶し始めます。CBL の **TRIGGER** を押すと、データ収集が開始されます。データ収集が終了すると、プログラムの指示により CBL から、接続されている電卓にデータを転送し、グラフ上に点で表示します。指示が出るまでは、**TRIGGER** を押さないでください。
- ② キャッチャーは位置に着いて、落下する物体がセンサーにぶつかる前に受け取れるように準備をします。キャッチャーの両手は、距離センサーのビームの外側に置きます。
- ③ 落とす係は、物体をセンサーの真上1.5mに保持します。

Note：センサーは、0.5mよりも近い対象は検出できません。物体を最低1.5m離れたところから落とすようにします。そうしないと、サンプルの数が少なすぎて、運動のモデルを調べることができなくなります。

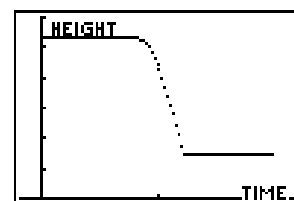
- ④ CBL が READY (準備完了)を表示したら、操作係は CBL の **TRIGGER** を押して、落とす係に物体を落とすように指示します。CBL は1.6秒間しかデータを記録しないようにプログラムされていますから、落とす係は **TRIGGER** が押されたらすぐに物体を放します。キャッチャーがつかんだときに、物体がセンサーの中央に向かっていただかどうかを確認します。そうでない場合には、実験を①からやり直します。
- ⑤ 収集されたデータを電卓で分析します。

分析と結論 No. 1

Note : 電卓の統計機能の利用方法については、ガイドブック「*CBL System Compatible Calculators*」の“Performing Data Analysis (データ分析)”を参照してください。

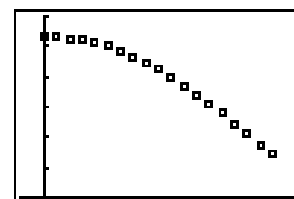
物体の高さの時間変化を表す関数を求めます。

収集したデータのプロットの中には、物体が落下を始める前と後の点も含まれています(水平線の部分)。電卓で STAT CALC を使って、曲線に合う2次関数を求める前に、これらの点を取り除かなければなりません。

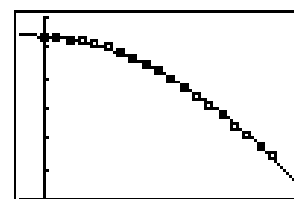


Note : 高さ(単位：フィート)は L_2 に記録され、時間は L_1 に記録されます。

点を取り除くには、電卓でプログラム SELECT を実行します。物体が実際に落下を始める点に、カーソルを移動します。**ENTER** を押すと、左端を示す垂直な線が表示されます。



つぎに、物体が落下を終えた点にカーソルを動かし、**ENTER** を押して右端を指示します。するとプログラムは両端の外側にある点をすべて取り除き、残ったデータを左に動かします。落下の最初の点は、 $x=0$ になります。収集データの部分集合である新しいデータは、 x 軸は L_3 (時間)、 y 軸は L_4 (高さ)に記録されます。



電卓で STAT CALC の QuadReg L_3, L_4 を使って、落下運動を表す2次関数を求めます。回帰方程式を $Y=$ 画面にコピーし、測定結果と同じ座標に回帰方程式を重ねてグラフ表示することができます。

この例では、関数 $y=-15.11x^2+5.26$ が式として得られ、測定データに重ねて表示されました。実験を行うたびに、異なった関数が得られます。それらの関数は $y=ax^2+bx+c$ の形(b は非常に小さい)をしています。

式を求める前に、物体が静止している間の点を取り除くと、通常は $y=ax^2+c$ の形の関数になります。 a と c の値について意見を出し合います。結論をいうと、 c の値は物体の最初の高さになります。重力と比べて物体に働くその他の力は無視できるので、 a の値は重力の影響を反映しているはずです。

実験手順 No. 2

トスされた物体

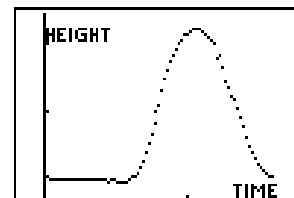
- ① 距離センサーがトスされた物体を検出できるように、センサーを椅子の上に上向きに置きます。
- ② CBL の電源が入っていることを確認してから、電卓でプログラム BALLDROP をスタートします。距離センサーのジィジィという音が始まります。
- ③ 落とす係は、センサーの真上に物体を保持します。落とす係の手と腕は、距離センサーのビームの外側に位置させます。CBL が READY (準備完了) を表示したら、操作係は CBL の **TRIGGER** を押し、同時に落とす係に物体をトスするように指示します。

上手にトスすると、物体はセンサーの真上に上がって、同じところに落ちてきます。落とす係は、落下する物体がセンサーにぶつかる前に受けとめます。

- ④ 分析に適した、良いデータが得られるまで、②と③を繰り返します。

分析と結論 No. 2

上手にトスした場合には、データは放物線を描くはずですが、その関数は $y=ax^2+bx+c$ の形をしています。 a , b , c の値について、意見を出し合います。前の実験と同じ物体を使った場合には、 a の値は前の実験とほとんど同じはずですが、



放物線の頂点を求めて、その値を物体の位置した最高の高さに関連づけてください。

収集したデータに合う2次関数を求めます。その関数のグラフを測定データと同じ座標で表示します。式の出来映えはどうでしょうか。電卓で STAT CALC の QuadReg (QuadReg : 2次回帰) を使うと、同じ式が得られます。

2次関数の一般式 $f(x)=ax^2+bx+c$ にデータの値を代入しても、2次関数を求めることができます。行列を使って、3元連立方程式を解くことになります。その他いろいろな方法が考えられます。

応用と発展

最初の実験の結論から、落下運動を表す式として2次関数を使えることが納得できます。屋外で、何人もの生徒に交替でボールをできるだけ高く投げ上げさせます。距離センサーが検出できるような十分大きいボールを使います。投げるときは距離センサーの真上に投げるように注意します。

ボールを投げ上げて、もとのところに落ちるようにすることは、たいへん難しいことです。しかし、2次関数を求めるのに必要なのは3点だけですから、ボールの軌跡から3点をうまく選んで、2次関数を求めます。それから2次関数の最大値を計算して、誰が一番高く投げたかを決定します。